A Ch A CH ACH

Apellido y nombres: ....

Padrón: .... Correo electrónico: ....

Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.

Examen Integrador. Quinta fecha. 3 de agosto de 2018.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de al menos 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1.

(a) Sea $f(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(3+4i)^n}$. Determinar para qué valores de r está bien definida la integral $\int_{|z|=r} \frac{1}{z}\left(3 - \frac{2}{z}\right) f(z)\, dz$ y en tales casos, calcularla.

(b) Hallar $u(x,y)$ acotada que sea solución del problema de Dirichlet en el semiplano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ con condición en la frontera $u(0,y) = 1$ para $|y| \leqslant 1$ y $u(0,y) = 0$ para $|y| > 1$. ¿Es única? Describir un sistema físico que pueda modelarse mediante este problema.

Ejercicio 2.

(a) Resolver:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} + u_t - u_{xx} = 0 & \text{en } 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{para todo } t \geqslant 0 \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 4 \operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right) & \text{para todo } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ u_t(x,0) = 0 & \text{para todo } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{array}$$

(b) Dar hipótesis suficientes sobre una función f definida en el intervalo $[-T,T]$ para que:

$$\int_{-T}^{T} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx = 0.$$

Ejercicio 3.

(a) Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Hallar $\mathcal{F}[f]$, $\mathcal{F}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 dx$.

(b) Resolver:

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_t & -\infty < x < +\infty,\ t > 0 \qquad (c > 0) \\ u(x,0) = g(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

especificando las condiciones supuestas sobre g.

Ejercicio 4.

(a) Demostrar que la transformada de Laplace de la convolución es igual al producto de las transformadas, especificando las correspondientes hipótesis.

(b) Obtener $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que para $t \geqslant 0$ verifican:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + t^2 e^{2t} H(t) \end{cases}, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0$$

con $H(t)$ función de Heaviside.